Les deux parties sont totalement indépendantes

MATHEMATIQUES (3 h)

I

On considère les applications f, g et h de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, définies par

$$f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \text{Log}(\sin t)\, dt\,; \qquad g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \text{Log}(\sin t)\, dt\,;$$

$$h(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \text{Log}(\cos t)\, dt.$$

1° Pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a. Démontrer que $g(x) = h(x)$.

b. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{2}\int_x^{\pi-x} \text{Log}(\sin t)\, dt$.

c. Déterminer la relation liant $f(2x)$ à $g(x)$.

2° *a.* Montrer que l'on a, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

b. Démontrer l'existence de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log}\left(\frac{\sin t}{t}\right) dt$.

c. Déduire de la question précédente que $f(x)$ admet une limite J lorsque x tend vers 0 à droite.

d. Montrer que $g(x)$ admet aussi pour limite J lorsque x tend vers 0 à droite.

3° Déduire des résultats de 1° et 2° la valeur de J.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs entières. On note P_{kl} la probabilité de l'événement « $X = k$ et $Y = l$ ». On suppose que l'on a :

$$\begin{cases} P_{kl} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda} \alpha^l (1-\alpha)^{k-l}}{l!\,(k-l)!} & \text{pour tout couple d'entiers } k \text{ et } l \text{ tels que } 0 \leqslant l \leqslant k, \\ P_{kl} = 0 & \text{pour tout autre couple d'entiers} \end{cases}$$

λ et α étant des nombres réels donnés tels que : $\lambda > 0$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

1° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y; les variables X et Y sont-elles indépendantes?

3° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X - Y$.

4° Soient A l'événement : « $Y = l$ », et B l'événement : « $Z = n$ ». Déterminer la probabilité conditionnelle de A par rapport à B. Qu'en déduire pour les variables aléatoires Y et Z?

5° On fait l'hypothèse que le nombre d'enfants d'une famille, tirée au hasard dans une population donnée, est une variable aléatoire, d'espérance 2,2, obéissant à une loi de Poisson. On admet qu'à chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est égale à $\frac{1}{2}$.

Quelle est la probabilité pour qu'une famille, ainsi choisie, contienne a enfants dont b garçons? Que peut-on dire des variables aléatoires représentant le nombre de garçons et le nombre de filles d'une famille choisie au hasard dans la population considérée?

FIN

×26×
E.N.S. ST.CLOUD & FONTENAY
Option Sciences Naturelles
1977

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail